طرق التبسيط

المعالجة	مشاكل النماذج
فرضيات تبسيط	النموذج معقد
إجراء التحويل الخطي – التقريب	النموذج غير خطي
إجراء تحويل لابلاس تحويل النموذج لنموذج فضاء الحالة	النموذج من رتبة عالية

▪إذا كانت المعادلات المعبرة عن المنظومة غير خطية ومن رتبة عالية فإننا نتبع عدة طرق لتبسيطها:

❖**التحويل الخطي**

❖**تحويل لابلاس**

❖**فضاء الحالة**

ملاحظة : عند استخدام التقريب لا يكون الحل الناتج حلاً وحيداً بالضرورة

1

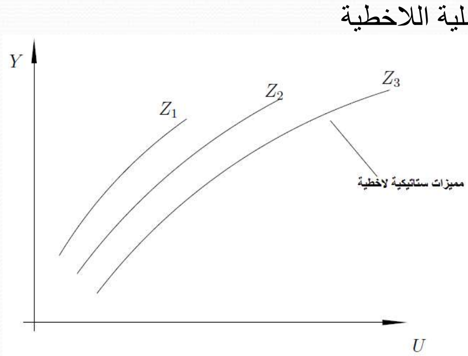
التحويل الخطي (التقريب الخطي) linearization

▪التحويل الخطي هو إجراء تبسيطي يهدف إلى تحويل النماذج (المعادلات والمميزات البيانية) التي تعبر عن منظومة لا خطية إلى نماذج خطية بتقريب مقبول.

▪يختلف نوع التحويل الخطي المعتمد باختلاف الطبيعة غير الخطية للمنظومة، ونميز بين:

✓التحويل الخطي للميزات الستاتيكية

✓التحويل الخطي للمعادلات التفاضلية اللاخطية

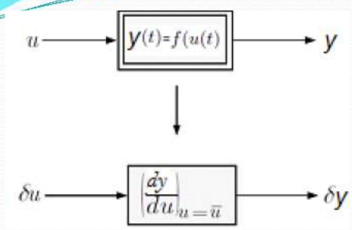


✓يمثل منحني الميزات الستاتيكية لتابع ما المحل الهندسي لنقاط توازن أو نقاط استقرار التابع

✓يجب أن تكون نقطة التوازن المختارة للتحويل الخطي في مركز مجال الاستثمار

2

التحويل الخطي للميزات الستاتيكية



▪ينتج عن عملية التحويل الخطي الاستعاضة عن العلاقة غير الخطية بين الدخل والخرج بعلاقة خطية تمثل **ميل المماس للمنحني** المعبر عن العلاقة الستاتيكية اللاخطية عند **نقطة عمل محددة**

نجري التحويل الخطي بثلاثة طرق:

1. **بيانياً: الاستعاضة عن المنحني السكوني بالمماس في نقطة عمل مختارة**
2. **تحليلياً: الاستعاضة عن المعادلة الديناميكية بمنشور تايلور بعد حذف الحدود غير الخطية**
3. **حذف الحدود غير الخطية : (نقطة العمل تنطبق على مبدأ الإحداثيات)**

3

التحويل الخطي للميزات الستاتيكية

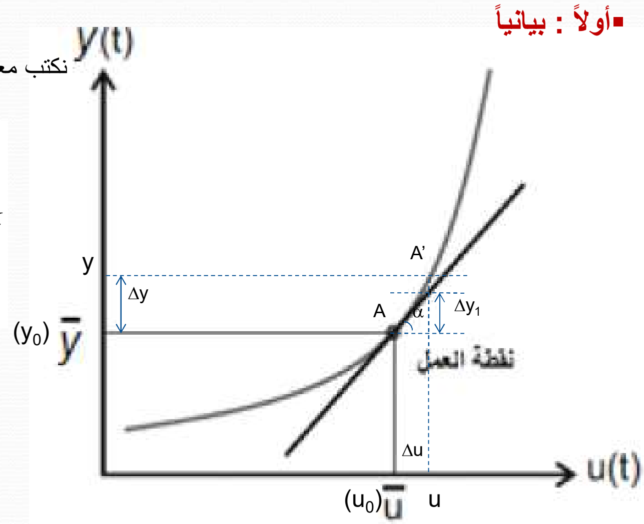
▪**أولاً : بيانياً**

نكتب معادلة المماس في نقطة العمل حيث

$$\Delta y \approx \Delta y_1$$

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{df(u)}{d(t)} = k$$

$$y - \bar{y} = k(u - \bar{u})$$



يكون الانحراف (الخطأ) مقبولاً عندما $\Delta u \to 0$

4

التحويل الخطي للميزات الستاتيكية

■ثانياً: تحليلياً (رياضياً)

تتم عملية التحويل الخطي بنشر العلاقة غير الخطية $y(t)=f(u(t))$ في سلسلة تايلور

$$y=f(\bar{u})+\left.\frac{df}{du}\right|_{u=\bar{u}}\cdot(u-\bar{u})+\frac{\left.\frac{d^2f}{du^2}\right|_{u=\bar{u}}}{2!}\cdot(u-\bar{u})^2+....+\frac{\left.\frac{d^nf}{du^n}\right|_{u=\bar{u}}}{n!}\cdot(u-\bar{u})^n$$

■نحذف الحدود غير الخطية ونبقي على الحدين الخطيين

$$y=f(\bar{u})+\left.\frac{df}{du}\right|_{u=\bar{u}}\cdot(u-\bar{u})$$

$$y=\bar{y}+k\cdot(u-\bar{u})$$

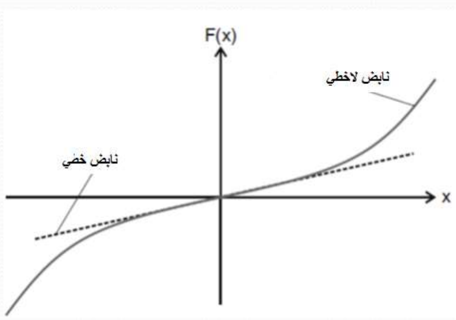
حيث k هو ميل المماس

5

مثال: النابض اللاخطي

■ثالثاً: حذف الحدود غير الخطية في جوار مبدأ الإحداثيات

نابض لا خطي يوصف بالمعادلة: $y=F(x)=k_1x+k_2x^3$



نقوم بتحويل هذه المعادلة إلى خطية في جوار مبدأ الإحداثيات وعند قيم كبيرة للانحرافات

➢ في جوار مبدأ الإحداثيات:

نهمل الحد الثاني من المعادلة فنحصل على معادلة النابض الخطي (نابض هوك)

$$F(x)=k_1x$$

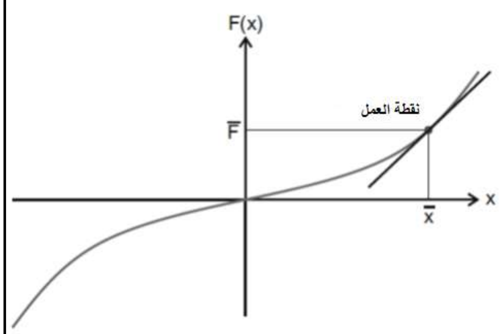
6

مثال: النابض اللاخطي

➢ **في مجال الانحرافات الكبيرة:**

لإجراء التحويل الخطي ينبغي أن نطور سلسلة تايلور في جوار نقطة مختلفة عن مبدأ الإحداثيات مع ضرورة الاكتفاء بالحد الخطي (الأول)

$$F(x)=\bar{F}(x)+\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=\bar{x}}\cdot(x-\bar{x})=\bar{F}(x)+\bar{F}'(x-\bar{x})$$



$$F(x)=k_1\bar{x}+k_2\bar{x}^3+\left(k_1+3k_2\bar{x}^2\right)\cdot(x-\bar{x})$$

$$F(x)=\underbrace{\left(k_1+3k_2\cdot\bar{x}^2\right)}_{k}x-\underbrace{2k_2\bar{x}^3}_{d}$$

$$y=k\,x-d$$

7

التحويل الخطي للنماذج الديناميكية

✓ توصيف المنظومات الستاتيكية بعلاقة جبرية من الشكل: $x(t)=f(u(t))$

✓ توصف المنظومات الديناميكية عموما بعلاقة من الشكل: $\dot{x}(t)=f(x(t),u(t))$

كي تكون المعادلة خطية : يجب أن يتحقق شرطا التجانس والتحصيل الشامل

تتم عملية التحويل الخطي بنشر العلاقة غير الخطية في سلسلة تايلور مع الاكتفاء بالحد الخطي.

$$\dot{x}(t)=f(\bar{x},\bar{u})+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}\cdot(x-\bar{x})+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}\cdot(u-\bar{u})$$

ما هو الشرط اللازم لكي يتم إجراء تحويل خطي لمعادلة تفاضلية؟

يجب أن نحدد نقطة عمل يكون تغير x عندها طفيفا أو معدوما عند الانحرافات الصغيرة

$\dot{x}(t)\to 0$

الإحداثيات المقابلة لنقطة العمل

$f(\bar{x},\bar{u})\to 0$

8

التحويل الخطي للنماذج الديناميكية

نجري التحويل الخطي عند الانحراف الطفيف عن هذه الوضعية بحيث يكون

$$x(t)=\bar{x}+\Delta x(t)$$
$$u(t)=\bar{u}+\Delta u(t)$$

بالاشتقاق ينتج:

$$\dot{x}(t)=\bar{x}+\Delta\dot{x}(t)$$
$$\dot{u}(t)=\bar{u}+\Delta\dot{u}(t)$$

كما هو واضح تتعلق ديناميكية المنظومة فقط بالقسم المتغير من الإحداثيات

ومن أجل الحصول على معادلة تفاضلية خطية نعتبر أن قيم الانحرافات عن نقطة العمل صغيرة بما يكفي. بتعويض العلاقات الأخيرة بعلاقة التحويل الخطي ينتج:

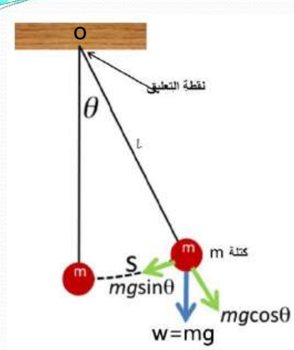
$$\Delta\dot{x}(t)=\underbrace{f(\bar{x},\bar{u})}_{=0}+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}\cdot\left(\bar{x}+\Delta x(t)-\bar{x}\right)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}\cdot\left(\bar{u}+\Delta u(t)-\bar{u}\right)$$

$$=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}\cdot\Delta x(t)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}}\cdot\Delta u(t)\Rightarrow\boxed{\Delta\dot{x}(t)=A\Delta x(t)+B\Delta u(t)}$$

معادلة الحالة

9

النموذج الرياضي لنواس بسيط



فرضيات التبسيط المعتمدة:

- اعتبار كتلة النواس نقطية متركزة على بعد *l* من نقطة التعليق (كتلة الخيط مهملة)
- مقاومة الهواء وقوى الاحتكاك في نقطة التعليق معدومة
- لا يوجد دخل

هنا تتكون هذه المنظومة البسيطة من عنصر وحيد هو الكرة التي تتأثر بقوتي ثقل الكرة وتوتر رد فعل خيط التعليق

$$\sum T_o=I\ddot{\theta}$$

$$I=m\cdot l^2$$ حيث I عزم العطالة الكتلي

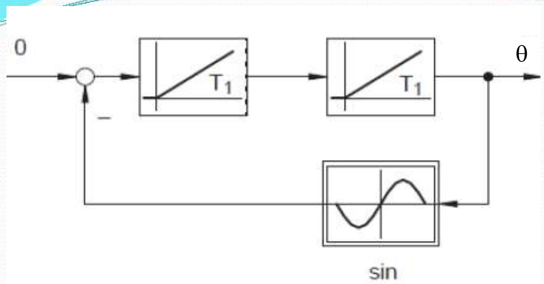
$$-mg\cdot l\sin\theta=m\cdot l^2\ddot{\theta}$$
$$g\sin\theta+l\ddot{\theta}=0$$

10

النموذج الرياضي لنواس بسيط

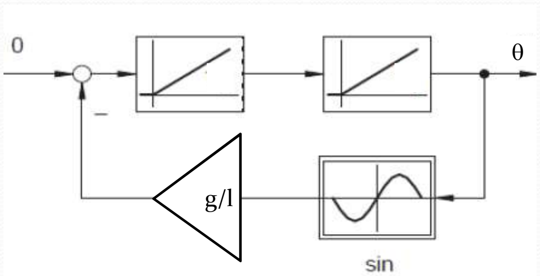
$$g\sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{l}{g}\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$$



بالقسمة على أمثال المشتق الأعلى رتبة نجد:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$



11

النموذج الرياضي لنواس بسيط

$$\frac{l}{g}\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$$

$$f_2(\theta) = \sin\theta$$

التحقق من الخطية:

شرط التجانس:

$$k \cdot y = f(ku) = k \cdot f(u)$$
$$\sin(k\theta) \neq k \cdot \sin\theta$$

شرط التحصيل الشامل:

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) \neq \sin\theta_1 + \sin\theta_2$$

التابع لا يحقق الشرطين

12

تحويل النموذج الرياضي لنواس بسيط إلى نموذج خطي

$$f_2(\theta)=\sin\theta$$

التحويل الخطي بنشر تايلور :

$$y=f(\bar{u})+\left.\frac{df}{du}\right|_{u=\bar{u}}\cdot(u-\bar{u})$$

$$y=\bar{y}+k\cdot(u-\bar{u})$$

$$f_2(\theta)=\sin\bar{\theta}+\cos\bar{\theta}\cdot(\theta-\bar{\theta})$$

نفرض أن: $k_1=\cos\bar{\theta}$ و $k_2=\sin\bar{\theta}+\cos\bar{\theta}\cdot(\bar{\theta})$

ينتج: $f_2(\theta)=k_1\theta+k_2$ بالتعويض في معادلة النواس $\frac{l}{g}\ddot{\theta}+k_1\theta+k_2=0$

التحويل الخطي بقواعد النسب المثلثية:

عند قيم صغيرة للزوايا $\theta<10$

$$\sin\theta=\theta\Rightarrow\frac{l}{g}\ddot{\theta}+\theta=0$$

13

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

توصلنا للنموذج الرياضي : $T_1\frac{dy}{dt}+K\cdot\sqrt{y}=u$

التحقق من الخطية : الحد الثاني $f_2(y)=K\cdot\sqrt{y}$ غير خطي لأنه لا يحقق الشرطين

شرط التجانس:

$$f(cu)\overset{?}{=}c\cdot f(u)$$
$$f(cu)=\sqrt{cy}$$
$$c\cdot f(u)=c\cdot\sqrt{y}$$
$$f(cu)\neq c\cdot f(u)$$

شرط التحصيل الشامل:

$$f(u_1+u_2)\overset{?}{=}f(u_1)+f(u_2)$$
$$f(u_1+u_2)=\sqrt{y_1+y_2}$$
$$f(u_1)+f(u_2)=\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}$$
$$f(u_1+u_2)\neq f(u_1)+f(u_2)$$

14

تحويل النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف إلى نموذج خطي

توصلنا للنموذج الرياضي : $T_1 \frac{dy}{dt} + K \cdot \sqrt{y} = u$

التحويل الخطى بنشر تايلور :

$$f_2(y) \approx f_2(\bar{y}) + \left.\frac{df_2(y)}{dy}\right|_{y=\bar{y}} \cdot (y - \bar{y})$$

$$f_2(y) \approx \left[k\sqrt{\bar{y}}\right] + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)(y - \bar{y})$$

$$f_2(y) \approx \left[k\sqrt{\bar{y}}\right] + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)(\bar{y}) + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)(y)$$

15

تحويل النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف إلى نموذج خطي

نفرض أن: $k_2 = \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right),\ k_1 = \left[k\sqrt{\bar{y}}\right] + \left(k\frac{1}{2\sqrt{\bar{y}}}\right)(\bar{y})$

نكتب نتيجة التحويل الخطي للحد غير الخطي على النحو التالي:

$$f_2(y) \approx k_1 + k_2(y)$$

وتصبح معادلة المنظومة بعد التحويل الخطي على الشكل:

$$T_1 \frac{dy}{dt} + k_2(y) + k_1 = u$$

تصبح عملية التحويل الخطي أكثر صعوبة في المنظومات ذات النماذج الأشد تعقيدا، كما أن الأخطاء الناجمة عن هذا التحويل قد تكون في بعض الحالات غير مقبولة.

16